

1 أكتب على الشكل الجبري كلا من الأعداد العقدية التالية :

$z_1 = (2-3i)(1+i)$ $\quad$ $z_2 = (2+3i)^2$

$z_3 = \dfrac{1}{1-3i}$ $\quad$ $z_4 = \dfrac{1}{3+4i}$

$z_5 = \dfrac{2-3i}{1+i}$ $\quad$ $z_6 = \dfrac{3+2i}{2-5i}$

الجواب

- لدينا $z_1 = (2-3i)(1+i)$

$= 2+2i-3i-3i^2 = 2-i+3$

ومنه $z_1 = 5-i$

- لدينا $z_2 = (2+3i)^2$

$= 4+12i+9i^2 = 4+12i-9$

ومنه $z_2 = -5+12i$

- لدينا $z_3 = \dfrac{1}{1-3i}$

$= \dfrac{1+3i}{(1-3i)(1+3i)} = \dfrac{1+3i}{1+9}$

ومنه $z_3 = \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10}i$

- لدينا $z_4 = \dfrac{1}{3+4i} = \dfrac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{3-4i}{9+16}$

ومنه $z_4 = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$

- لدينا $z_5 = \dfrac{2-3i}{1+i} = \dfrac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{-1-5i}{2}$

ومنه $z_5 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{2}i$

- لدينا $z_6 = \dfrac{3+2i}{2-5i} = \dfrac{(3+2i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \dfrac{-4+19i}{29}$

ومنه $z_6 = -\dfrac{4}{29} + \dfrac{19}{29}i$

2 اكتب على الشكل الجبري للأعداد العقدية التالية :

$$z_1 = (2+i)^2(2-i)$$

$$z_2 = \frac{(1+i)(2-3i)}{2-i}$$

$$z_3 = \frac{7+2i}{1-i} + \frac{1+i}{7-2i}$$

$$z_4 = \frac{(\sqrt{2} - i\sqrt{2})(\sqrt{3} - i)}{(1+i\sqrt{3})(1+i)}$$

الجواب لدينا

$$z_1 = (2+i)^2(2-i)$$
$$= (2+i)(2+i)(2-i)$$
$$= (2+i)(2^2 - i^2) = (2+i)(4+1)$$
$$= 10+5i$$

لدينا

$$z_2 = \frac{(1+i)(2-3i)}{2-i}$$
$$= \frac{2-3i+2i-3i^2}{2-i} = \frac{5-i}{2-i}$$
$$= \frac{(5-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10+5i-2i-i^2}{4+1}$$
$$= \frac{11+3i}{5} = \frac{11}{5} + \frac{3}{5}i$$

لدينا

$$z_3 = \frac{7+2i}{1-i} + \frac{1+i}{7-2i}$$
$$= \frac{(7+2i)(7-2i)+(1-i)(1+i)}{(1-i)(7-2i)}$$
$$= \frac{(49+4)+(1+1)}{7-2i-7i+2i^2} = \frac{55}{5-9i}$$
$$= \frac{55(5+9i)}{25+81} = \frac{275}{106} + \frac{495}{106}i$$

لدينا $z_4 = \frac{(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\sqrt{3}-i)}{(1+i\sqrt{3})(1+i)}$

$= \frac{\sqrt{2}(1-i)(\sqrt{3}-i)(1-i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})(1+i)(1-i)}$

$= \frac{\sqrt{2}(1-i)^2(\sqrt{3}-3i-i+i^2\sqrt{3})}{(1+3)(1+1)}$

$= \frac{\sqrt{2}(1-2i+i^2)(\sqrt{3}-4i-\sqrt{3})}{8} = \frac{\sqrt{2}(-2i)(-4i)}{8}$

$= -\sqrt{2}$

3 اكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية :

$z_1 = (1+i)^{2002}$

$z_2 = (1-i)^{2003}$

$z_3 = 1+i+i^2+ --- +i^{2004}$

$z_4 = 1+i^2+i^4+ --- +i^{2006}$

الجواب لدينا $z_1 = (1+i)^{2002}$

$= ((1+i)^2)^{1001} = (1+2i+i^2)^{1001}$

$= (2i)^{1001} = 2^{1001} \times (i)^{1000} \cdot i$

$= 2^{1001} \times (i^2)^{500} \cdot i = 2^{1001} \times (-1)^{500} \cdot i$

ومنه $z_1 = 2^{1001} \cdot i$

$z_2 = (1-i)^{2003}$

$= (1-i)^{2002} \cdot (1-i) = ((1-i)^2)^{1001} \cdot (1-i)$

$= (-2i)^{1001} \cdot (1-i) = (-2i)^{1000} \cdot (-2i)(1-i)$

$$Z_2 = 2^{1000} \cdot (-2 - 2i)$$

ومنه $Z_2 = -2^{1001} \cdot (1 + i)$

لدينا $Z_3 = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2004}$

$$= \frac{1 - i^{2005}}{1 - i} = \frac{1 - (i^2)^{1002} \cdot i}{1 - i} = \frac{1 - (-1) \cdot i}{1 - i} \quad \begin{pmatrix} \text{لأن} \\ i \neq 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1 - i}{1 - i}$$

ومنه $Z_3 = 1$

لدينا $Z_4 = 1 + i^2 + i^4 + \dots + i^{2006}$

$$= 1 + i^2 + (i^2)^2 + \dots + (i^2)^{1003}$$

$$= \frac{1 - (i^2)^{1004}}{1 - i^2} = \frac{1 - (-1)^{1004}}{2} = \frac{1 - 1}{2}$$

ومنه $Z_4 = 0$.

4 ليكن x عددًا حقيقيًا.

نضع $Z = (x + i)\left[(x + 5) - i(x - 7)\right]$

1) حدد قيم x التي من أجلها يكون Z تخيلي صرف .

2) حدد قيم x التي من أجلها يكون Z حقيقي .

<u>الجواب</u> لدينا $Z = (x + i)\left[(x + 5) - i(x - 7)\right]$

$$= \left[x(x + 5) + (x - 7)\right] + i\left[x + 5 - x(x - 7)\right]$$

$$= (x^2 + 6x - 7) + i(-x^2 + 8x + 5)$$

1) $Z \in i\mathbb{R} \iff Re(Z) = 0 \iff x^2 + 6x - 7 = 0$

$\iff x = 1$ أو $x = -7$.

2) $Z \in \mathbb{R} \iff Im(Z) = 0 \iff -x^2 + 8x + 5 = 0$

$\iff x = 4 + \sqrt{21}$ أو $x = 4 - \sqrt{21}$

5 : اكتب على الشكل الجبري الأعداد العقدية التالية :

$$Z_1=(2+i)(-1+i)(1+2i)^3$$

$$Z_2=(1+i\sqrt{3})^3$$

$$Z_3=\frac{1-3i}{3-i}$$

$$Z_4=(1-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{2})$$

<u>الجواب</u> لدينا

$$Z_1=(2+i)(-1+i)(1+2i)^3$$
$$=(-2+2i-i+i^2)(1+6i+12i^2+8i^3)$$
$$=(-2+i-1)(1+6i-12-8i)$$
$$=(-3+i)(-11-2i)$$
$$=33+6i-11i-2i^2=33-5i+2$$
$$=35-5i$$

لدينا

$$Z_2=(1+i\sqrt{3})^3$$
$$=1+3\sqrt{3}i+3(i\sqrt{3})^2+(i\sqrt{3})^3$$
$$=1+3\sqrt{3}i-9-3\sqrt{3}i$$
$$=-8$$

لدينا

$$Z_3=\frac{1-3i}{3-i}=\frac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$$
$$=\frac{3-9i+i-3i^2}{9+1}=\frac{3-8i+3}{10}$$
$$=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$$

لدينا

$$Z_4=(1-i\sqrt{3})(1-i\sqrt{2})(1+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{2})$$
$$=(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{2})(1+i\sqrt{2})$$
$$=(1^2-(i\sqrt{3})^2)(1^2-(i\sqrt{2})^2=(1+3)(1+2)$$
$$=12$$

6 احسب معيار الأعداد العقدية التالية :

$$z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$$

$$z_2 = (1+i)^2$$

$$z_3 = \frac{5}{(1-2i)^4}$$

$$z_4 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3$$

الجواب لدينا $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

إذن $|z_1| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6+2}$

ومنه $|z_1| = 2\sqrt{2}$

لدينا $z_2 = (1+i)^2$

إذن $|z_2| = |1+i|^2 = (\sqrt{2})^2$

ومنه $|z_2| = 2$

لدينا $z_3 = \frac{5}{(1-2i)^4}$

إذن $|z_3| = \frac{5}{|1-2i|^4} = \frac{5}{(\sqrt{5})^4}$

ومنه $|z_3| = \frac{1}{5}$

لدينا $z_4 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3$

إذن $|z_4| = \left(\frac{|\sqrt{3}-i|}{|1-i|}\right)^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3$

ومنه $|z_4| = 2\sqrt{2}$

7 حل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلتين التاليتين :

(1) $(2+i)z+3+i=0$

(2) $(3-i)(z+2i)=(3+5i)z+2-4i$

__الجواب__ لنحل المعادلة (1) $(2+i)z+3+i=0$

$$\Leftrightarrow \quad z=-\frac{3+i}{2+i}=-\frac{(3+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$\Leftrightarrow \quad z=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S_1=\left\{-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i\right\}$

لنحل المعادلة (2) $(3-i)(z+2i)=(3+5i)z+2-4i$

$$\Leftrightarrow \quad (3-i)z+6i+2=(3+5i)z+2-4i$$

$$\Leftrightarrow \quad (3-i)z-(3+5i)z=2-4i-2-6i$$

$$\Leftrightarrow \quad -6iz=-10i$$

$$\Leftrightarrow \quad z=\frac{5}{3}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي $S_2=\left\{\frac{5}{3}\right\}$

8 حل في $\mathbb{C}$ كلا من المعادلتين التاليتين :

(1) $z-2i\bar{z}=1$

(2) $(1-i)z-3i\bar{z}=1+4i$

__الجواب__ لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1) $z-2i\bar{z}=1$

لنضع $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

لدينا

$$(1) \Leftrightarrow \quad x+iy-2i(x-iy)=1$$

$$\Leftrightarrow \quad x-2y+i(y-2x)=1$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y=1 \\ -2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S_1=\left\{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i\right\}$

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(1-i)z-3i\bar{z}=1+4i \quad (2)$

لنضع $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

لدينا

$$(2) \Leftrightarrow (1-i)(x+iy)-3i(x-iy)=1+4i$$

$$\Leftrightarrow x-2y+i(y-4x)=1+4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ -4x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{9}{7} \\ y=-\frac{8}{7} \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي $S_2=\left\{-\frac{9}{7}-i\frac{8}{7}\right\}$

9 حل في $\mathbb{C}^2$ النظمة التالية :

$$(S)\begin{cases} 2z+(1-i)z'=1-i \\ -iz+z'=-2i \end{cases}$$

الجواب النظمة (S) تكافئ

$$\begin{cases} z'=-2i+iz \\ 2z+(1-i)(-2i+iz)=1-i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z'=-2i+iz \\ (3+i)z=3+i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ z'=-i \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول النظمة (S) هي $S=\{(1,-i)\}$

10 حل في $\mathbb{C}^2$ النظمة التالية :

$$(S)\begin{cases} (1+i)z-iz'=z+i \\ (2+i)z-(2-i)z'=7-4i \end{cases}$$

الجواب النظمة (S) تكافئ

$$\begin{cases} z-z'=1 \\ (2+i)z-(2-i)z'=7-4i \end{cases}$$

لدينا

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2+i & -(2-i) \end{vmatrix}$$

$$= -2+i+2+i = 2i$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7-4i & -(2-i) \end{vmatrix}$$

$$= -2+i+7-4i = 5-3i$$

$$\Delta_{z'} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2+i & 7-4i \end{vmatrix}$$

$$= 7-4i-2-i = 5-5i$$

إذن

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{5-3i}{2i} = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$z' = \frac{\Delta_{z'}}{\Delta} = \frac{5-5i}{2i} = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$$

ومنه مجموعة الحلول للجملة (S) هي $S = \left\{ \left(-\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i , -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i \right) \right\}$

11

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

(1) $\frac{z-1}{iz+3} = 4i$

(2) $-z\bar{z} + 3z + 2 = 6i$

(3) $3\bar{z} = 1-4i$

(4) $(3z+1)(\bar{z}+1+2i) = 0$

الجواب لدينا

(1) $\frac{z-1}{iz+3} = 4i$

$\Leftrightarrow z-1 = 4i(iz+3)$ و $iz+3 \neq 0$

$\Leftrightarrow z-1 = -4z+12i$ و $z \neq 3i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي

$$S_1 = \left\{ \frac{1}{5} + \frac{12}{5}i \right\}$$

لدينا (2) $-z\bar{z} + 3z + 2 = 6i$

ليكن $z = x + iy$ حيث : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

إذن $z\bar{z} = x^2 + y^2$

إذن $(2) \Leftrightarrow -x^2 - y^2 + 3x + 2 + 3iy = 6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - y^2 + 3x + 2 = 0 \\ 3y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي

$$S_2 = \{ 1 + 2i \ , \ 2 + 2i \}$$

لدينا (3) $3\bar{z} = 1 - 4i$

$$\Leftrightarrow \overline{3\bar{z}} = \overline{1 - 4i}$$

$$\Leftrightarrow 3z = 1 + 4i \Leftrightarrow z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i$$

ومنه مجموعة المعادلة (3) هي

$$S_3 = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i \right\}$$

لدينا (4) $(3z + 1)(\bar{z} + 1 + 2i) = 0$

$$\Leftrightarrow 3z + 1 = 0 \text{ أو } \bar{z} + 1 + 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{3} \text{ أو } \bar{z} = -1 - 2i$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{3} \text{ أو } \bar{\bar{z}} = \overline{-1 - 2i}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{3} \text{ أو } z = -1 + 2i$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (4) هي

$$S_4 = \left\{ -\frac{1}{3} , -1 + 2i \right\}$$

12 حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

(1) $3i\overline{z} = i - 4$

(2) $3\overline{z} - 2iz = 2 - 3i$

(3) $z\overline{z} + 3z = -2 + 6i$

(4) $(3z - i)(\overline{z} + 1 + 2i) = 0$

الجواب

لدينا (1) $3i\overline{z} = i - 4$

$\Leftrightarrow \overline{3i\overline{z}} = \overline{i - 4}$

$\Leftrightarrow -3iz = -i - 4 \Leftrightarrow z = \frac{1}{3} + \frac{4}{3i}$

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (1) هي :

$$S_1 = \left\{\frac{1}{3} - \frac{4}{3}i\right\}$$

لدينا (2) $3\overline{z} - 2iz = 2 - 3i$

ليكن $z = x + iy$ حيث $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

إذن (2) $\Leftrightarrow 3(x - iy) - 2i(x + iy) = 2 - 3i$

$\Leftrightarrow (3x + 2y) + i(-3y - 2x) = 2 - 3i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -2x - 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow z = i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (2) هي:

$$S_2 = \{i\}$$

لدينا (3) $\Leftrightarrow z\overline{z} + 3z = -2 + 6i$

ليكن $z = x + iy$ حيث $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

إذن (3) $\Leftrightarrow (x^2 + y^2) + 3(x + iy) = -2 + 6i$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 3x) + 3iy = -2 + 6i$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+3x=-2 \\ 3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x^2+3x+6=0 \end{cases}$$

بما أن مميز المعادلة: $x^2+3x+6=0$ هو $\Delta=-15<0$

فإن مجموعة حلول المعادلة: (3) هي : $S_3=\phi$

لدينا $(4) \Leftrightarrow (3z-i)(\bar{z}+1+2i)=0$

$\Leftrightarrow 3z-i=0$ أو $\bar{z}+1+2i=0$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{3}i$ أو $\bar{z}=-1-2i$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{3}i$ أو $\overline{\bar{z}}=\overline{-1-2i}$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{3}i$ أو $z=-1+2i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة: (4) هي :

$S_4=\left\{\frac{1}{3}i\ ,\ -1+2i\right\}$.

13 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^4-1=0$

<u>الجواب</u> لدينا $(E)\quad z^4-1=0$

$\Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1)=0$

$\Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)=0$

$\Leftrightarrow z-1=0$ أو $z+1=0$ أو $z-i=0$ أو $z+i=0$

$\Leftrightarrow z=1$ أو $z=-1$ أو $z=i$ أو $z=-i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة: (E) هي :

$S=\{-i,-1,i,1\}$